**Пример решения задачи на тему «Статика в пространстве»**

**Условия задачи**

Параллелепипед нагружен силой F и моментом m.

**m**

**F**

1. Докажите, что сила **F** и момент **m** не уравновешены и не имеют равнодействующей.
2. Обозначьте вершины, углы и оси.
3. Поставьте определимые связи.
4. Запишите уравнения равновесия тела а) геометрическим и б) матричным способом.
5. Найдите главный вектор и главный момент реакций относительно

 точки приложения силы F

**Решение.**

1. Сила и момент не уравновешенны, поскольку в точке приложения силы главный вектор системы **V** равен силе **F**, а главный момент **M** - моменту m и оба не равны нулю.

К

x

XA

y

YA

ZA

z

**m**

**F**

А

В

C

D

E

α

β

К

**m**

**F**

C

D

α

β

Е

А

В

Поскольку **V** и **M** не перпендикулярны друг другу, то не имеют равнодействующей.

1. Обозначим углы α и β и вершины А,В,Е, в которых будем ставить связи. Добавим обозначения вершин С и D для обозначения размеров тела.
2. Поставим определимые связи. Начнем с точки А. В принципе, здесь можно было бы поставить глухую заделку, в которой возникли бы все 6 требуемых неизвестных: по 3 составляющих силы и момента. Однако это не интересно и не разумно с инженерной точки зрения. Ведь моменты в такой заделки были бы большими, что привело бы к использованию сверхпрочных материалов и удорожанию конструкции связей.

Поставим в точке А сферический шарнир. Поскольку в нем возникает 3 неизвестных составляющих реакции, то выберем здесь начало координат. Заметим, что реакция шарнира А направлена произвольно.

Следующую связь поставим в точке Е. Может возникнуть соблазн поставить здесь тоже сферический шарнир, чтобы набрать требуемые 6 неизвестных. Делать этого нельзя, поскольку тело сможет вращаться вокруг АЕ (связи недостаточны) и реакции в точках А и Е смогут оказаться на одной прямой АЕ (связи будут избыточными в этом направлении).

К

XE

ZE

x

XA

y

YA

ZA

z

S

**m**

**F**

А

В

C

D

E

α

β

Поставим в точке Е цилиндрический шарнир. Его реакция не должна пройти через вершину А. Реакция цилиндрического шарнира направлена произвольно в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Ее задача остановить вращение прямой АЕ вокруг А. Поэтому ось шарнира нельзя направить перпендикулярно прямой АЕ. Иначе связи станут избыточными в направлении АЕ и недостаточными для поворота прямой АЕ.

А как следовало бы направить ось цилиндрического шарнира Е, чтобы его реакция была минимальной для данной нагрузки? Ответ находим из понимания функции, которую выполняет реакция шарнира Е. Она должна препятствовать повороту тела вокруг шарнира А. Для этого реакция шарнира Е должна создавать максимальный момент относительно шарнира А. Сила создает максимальный момент, когда имеет максимальное плечо, т.е. перпендикулярна направлению на А. Отсюда вывод: реакция в шарнире Е будет минимальной, если ось шарнира направить по прямой АЕ. Такое направление усложнит составление уравнений. Поэтому направим ось шарнира Е вдоль оси у.

Теперь у нас 5 неизвестных из 6ти требуемых. Тело пока еще может иметь вращение вокруг АЕ, которое нужно остановить связью с одной неизвестной. У нас в распоряжении нить, каток, опирание и стержень на шарнирах. Поставим в точке В двустороннюю связь - стержень, помня, что односторонние связи «держат» не любую нагрузку. Стержень нельзя направить в плоскости АВЕ. Иначе он будет избыточным в своем направлении и не удержит тело от поворота вокруг АЕ. Реакция стержня была бы минимальной, если его направить перпендикулярно плоскости АВЕ. Для простоты направим стержень вдоль оси у.

1. ***а) Геометрический способ***

 Уравнения проекций не вызывают затруднений

 Vx: $X\_{A}-X\_{E}=0$

 Vy: $ Y\_{A}+S+F Cosβ=0$

 Vz: $Z\_{A}-Z\_{E}-F Sinβ=0$

При вычислении моментов сил пользуемся простым алгоритмом.

* Сначала интересуемся, не равен ли момент силы нулю (сила параллельна или пересекает ось). Например, F пересекает ось у.
* Если ответ отрицательный, то смотрим, не перпендикулярна ли сила оси. Тогда момент ищется по формуле, например

$$m\_{x}\left(F\right)=\pm Fh\_{x}$$

 Знак лучше выбирать, представив, куда движется винт под действием силы. Если винт движется по оси,

 то плюс, иначе минус. Для поиска плеча $h\_{x}$ пользуемся правилом трех направлений. $h\_{x}$ должно быть

 перпендикулярно и F и х.

* Если сила направлена по отношению к оси произвольно, то следует разложить ее на составляющие вдоль осей. Для составляющих пользуемся вторым случаем.

Mx: $m Cosα -F Cosβ AB-S AB-Z\_{E} BC=0$

 My: $m Sinα-X\_{E} CD-Z\_{E} CE=0 $

Mz: $X\_{E} BC=0$

б) Матричный способ

Уравнения равновесия в матричной форме

$$F\_{A}+F\_{B}+F\_{E}=0$$

$R\_{A}F\_{A}+R\_{B}F\_{B}+R\_{E}F\_{E}+m=0$ (2)

Строим последовательно для каждой точки столбец координат точки, его присоединенную матрицу и столбец проекций сил и моментов:

А: $r\_{A}=0, R\_{A}=0, F\_{A}=\left(\begin{matrix}X\_{A}\\Y\_{A}\\Z\_{A}\end{matrix}\right)$; B: $r\_{B}=\left(\begin{matrix}0\\0\\AB\end{matrix}\right), R\_{B}=\left(\begin{matrix}0&-AB&0\\AB&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right), F\_{B}=\left(\begin{matrix}0\\S+FCosβ\\-FSinβ\end{matrix}\right);$

E: $r\_{E}=\left(\begin{matrix}-CE\\AD\\AB\end{matrix}\right), R\_{E}=\left(\begin{matrix}0&-AB&AD\\AB&0&CE\\-AD&-CE&0\end{matrix}\right), F\_{E}=\left(\begin{matrix}-X\_{E}\\0\\-Z\_{E}\end{matrix}\right); m=\left(\begin{matrix}mCosα\\mSinα\\0\end{matrix}\right)$

$$ $$

Подставив матрицы в выражения (2) придем к уравнениям (1)

Исследовать определимость связей и подготовить решение алгебраической системы (2), например,

на <http://www.math-pr.com/matr_det_1.php> можно, записав ее в виде

$$R\_{A}+R\_{B}+R\_{E}=-F$$

$AR\_{A}+BR\_{B}+ER\_{E}=-M-BF$ (3)

и построив такие матрицы сил

$R\_{A\*}=\left(\begin{matrix}X\_{A}\\0\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\Y\_{A}\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\0\\Z\_{A}\end{matrix}\right), R\_{B\*}=\left(\begin{matrix}0\\S\\0\end{matrix}\right), R\_{E\*}=\left(\begin{matrix}-X\_{E}\\0\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\0\\-Z\_{E}\end{matrix}\right)$ (4)

Суммарное число столбцов в этих матрицах всегда равно шести.

Теперь матрицу алгебраической системы для столбца искомых реакций

$$X=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}X\_{A}\\Y\_{A}\\Z\_{A}\end{matrix}\\S\\X\_{E}\\Z\_{E}\end{array}\right)$$

можно записать в виде

$$Å=\left(\begin{matrix}R\_{A\*\*}&R\_{B\*\*}&R\_{E\*\*}\\AR\_{A\*\*}&BR\_{B\*\*}&ER\_{E\*\*}\end{matrix}\right)$$

где матрицы с двумя звездочками получены из матриц (4) заменой искомых реакций единицами.

Для данной задачи получаем

$$Å=\left(\begin{matrix}\left(\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right)&\left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)&\left(\begin{matrix}-1\\0\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\0\\-1\end{matrix}\right)\\\left(\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right)&\left(\begin{matrix}0&-AB&0\\AB&0&0\\0&0&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right)&\left(\begin{matrix}0&-AB&AD\\AB&0&-CE\\-AD&CE&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}-1\_{}\\0\\0\end{matrix}\begin{matrix}0\\0\\-1\_{}\end{matrix}\right)\end{matrix}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} \begin{matrix}0& -1& 0\\1& 0& 0\\0& 0& -1\end{matrix}\\\begin{matrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{matrix} \begin{matrix}-AB&0&-AD\\0&-AB&CE\\0& AD&0\end{matrix}\end{array}\right)$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля

$\left|Å\right|=AB AD CB\ne 0$

Значит связи статически определимы.

Если цилиндрический шарнир переместить в точку К

$$K=\left(\begin{matrix}0&0&0\\0&0&-CE\\0&CE&0\end{matrix}\right),$$

то реакции X шарниров смогут оказаться на одной прямой, и появляется свобода вращения вокруг оси Z.

Поэтому столбцы $X\_{A} и X\_{K} $матрицы окажутся пропорциональными, а ее строка Mz станет нулевой

 $ X\_{A}$ $Y\_{A} Z\_{A}$ $ S X\_{K} Y\_{K}$

$Å=\left(\begin{array}{c}\begin{matrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{matrix} \begin{matrix}0& -1& 0\\1& 0& 0\\0& 0& -1\end{matrix}\\\begin{matrix} 0& 0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{matrix} \begin{matrix}0& 0& 0 \\0& 0&CE\\0& 0&0\end{matrix}\end{array}\right)$, $\left|Å\right|=0$

Связи стали избыточными по х и недостаточными по вращению вокруг z.

А.Костарев 2011